KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI
Próbna Matura z OPERONEM

Matematyka
Poziom podstawowy

Listopad 2017

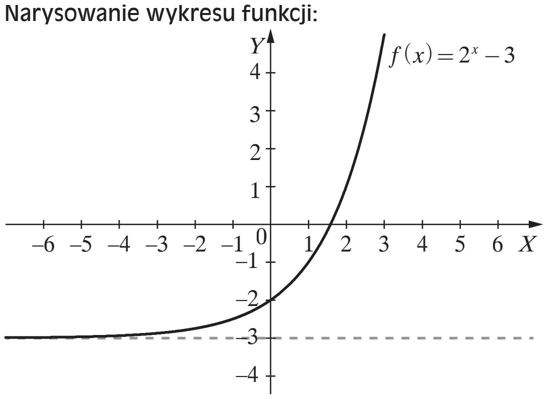
Zadania zamknięte

Za każdą poprawną odpowiedź zdający otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
1.	A	$\log_2 \frac{1}{\sqrt{8}} = x \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$
2.	B	$a = \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3} = \frac{14\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+3\right)}{\left(\sqrt{2}-3\right)\left(\sqrt{2}+3\right)} = \frac{28+42\sqrt{2}}{-7} = -4-6\sqrt{2} \approx -12{,}485$
3.	B	$x = 9m+7 \wedge m \in N$, $x^2 = (9m+7)^2 = 81m^2+126m+49 = 9\left(9m^2+14m+5\right)+4$ Zatem reszta z dzielenia przez 9 wynosi 4, gdyż: $9m^2+14m+5 \in N$
4.	B	Prosta AB ma wzór: $y = -\frac{5}{8}x - \frac{26}{8}$, zatem współczynnik kierunkowy prostej k jest równy $a = \frac{8}{5}$.
5.	A	$a_3 = \frac{7}{6}$, $a_5 = \frac{11}{8}$ $\left(\frac{7}{6}, x, \frac{11}{8}\right)$ – ciąg arytmetyczny, więc $x = \frac{\frac{7}{6}+\frac{11}{8}}{2} \Rightarrow x = \frac{61}{48}$
6.	C	$x_0 = 2\sqrt{3} \Rightarrow {x_0}^3 = \left(2\sqrt{3}\right)^3 \Rightarrow x_0 = 8 \cdot 3\sqrt{3} \Rightarrow x_0 = 24\sqrt{3}$
7.	B	$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2$. Inne punkty nie spełniają równania określającego funkcję.
8.	D	$a_7 + a_8 = 0 \Rightarrow a_1q^6 + a_1q^7 = 0 \Rightarrow a_1q(1+q) = 0$. Wyrazy ciągu są różne od 0, zatem z równania otrzymujemy $q = -1$. Obliczamy sumę tysiąca początkowych wyrazów ciągu: $S_{1000} = a_1\frac{1-(-1)^{1000}}{1+1} \Rightarrow S_{1000} = 0$
9.	D	$\lvert\angle ADC\rvert = \lvert\angle ABC\rvert = 70^\circ$, $\lvert\angle DCA\rvert = 90^\circ \Rightarrow \lvert\angle DAC\rvert = 180^\circ - 70^\circ - 90^\circ = 20^\circ$
10.	B	Kwadrat skali podobieństwa to stosunek pól, zatem $k^2 = \frac{60}{12} = 5$, stąd $k = \sqrt{5}$. Zatem obwód trójkąta DEF jest równy $16\sqrt{5}$.
11.	C	$4m-2<0 \wedge k-3=0 \Rightarrow m<\frac{1}{2} \wedge k=3$
12.	C	Wzór funkcji, której wykres powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ w symetrii osiowej względem osi OX, to $y = -f(x)$, zatem $y = -f(x) = -x^2+4$.

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
13.	C lub D	Wyrażenie jest określone dla wszystkich x z wyjątkiem miejsc zerowych mianownika, szukamy więc miejsc zerowych trójmianu kwadratowego: $x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$.
14.	D	Jeśli x, $x+4$ – długości przyprostokątnych, to: $\frac{x}{x+4}=\mathrm{tg}30^\circ \Rightarrow \frac{x}{x+4}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3x=x\sqrt{3}+4\sqrt{3} \Rightarrow$ $x\left(3-\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3} \Rightarrow x=\frac{4\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \Rightarrow x=\frac{4\sqrt{3}\left(3+\sqrt{3}\right)}{9-3} \Rightarrow$ $x=\frac{12\sqrt{3}+12}{6} \Rightarrow x=2\sqrt{3}+2$
15.	C	Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, zatem tylko liczba (-3) czyni daną nierówność fałszywą.
16.	D	Przedziały są rozłączne, zatem $B \setminus A=B$.
17.	D	$P=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\sin\alpha=3\sqrt{15} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$, wyznaczamy cosinus kąta z „jedynki trygonometrycznej": $\cos^2\alpha+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{16} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{4} \vee \cos\alpha=-\frac{1}{4}$ Wybieramy ujemną liczbę, gdyż z treści zadania wiadomo, że kąt α jest rozwarty.
18.	B	Co najwyżej 1, to znaczy 1 lub 0. $\lvert\Omega\rvert=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16, \lvert A\rvert=4+1=5 \Rightarrow P(A)=\frac{5}{16}$
19.	B	$2r=12 \Rightarrow r=6 \wedge h=6 \wedge l=6\sqrt{2} \Rightarrow$ $P=\pi\cdot 36+\pi\cdot 6\cdot 6\sqrt{2} \Rightarrow P=36\pi\left(1+\sqrt{2}\right)$
20.	B	Wyznaczamy wzór na ogólny wyraz ciągu: $a_n=S_n-S_{n-1}=3n^2+4n-\left[3(n-1)^2+4(n-1)\right] \Rightarrow$ $a_n=3n^2+4n-\left(3n^2-6n+3+4n-4\right) \Rightarrow$ $a_n=6n+1 \Rightarrow a_5=31$
21.	D	$x_w=2 \Rightarrow -\frac{16}{2m+6}=2 \Rightarrow 4m+12=-16 \Rightarrow m=-7$ Zatem funkcja kwadratowa ma wzór: $f(x)=-4x^2+16x+5 \Rightarrow f(2)=-\frac{-336}{-16}=21$
22.	B	h – wysokość trójkąta $h^2=a^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow h=\frac{a\sqrt{6}}{2}$ Pole przekroju jest więc równe $P=\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
23.	D	$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=36 \Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=36 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=34$

Zadania otwarte

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
24.	Postęp: Przekształcenie nierówności do postaci $-9x^2+12x-3<0$ i wyznaczenie pierwiastków: $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=1$	1
	Rozwiązanie bezbłędne: Rozwiązanie nierówności: $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$	2
25.	Postęp: Narysowanie wykresu funkcji:  	1
	Rozwiązanie bezbłędne: Podanie zbioru wartości funkcji: $ZW=(-3,+\infty)$	2
26.	Postęp: Zapisanie nierówności w postaci: $\frac{1-4a+4a^2}{1-a}\geq 0$	1
	Rozwiązanie bezbłędne: Zapisanie nierówności w postaci: $\frac{(1-2a)^2}{1-a}\geq 0$ i uzasadnienie, że jest prawdziwa: licznik zawsze nieujemny i mianownik dodatni, gdyż z założenia $a<1$, zatem cały ułamek zawsze nieujemny.	2
27.	Postęp: Zapisanie wzoru funkcji w postaci: $f(x)=(x-2)(x+4)$	1
	Rozwiązanie bezbłędne: Przekształcenie wzoru do postaci ogólnej i zapisanie współczynników: $b=2$, $c=-8$	2
28.	Postęp: Zapisanie równania wynikającego z treści zadania: $3^{2b}=3^a\cdot 3^c$	1
	Rozwiązanie bezbłędne: Przekształcenie równania i zapisanie wniosku uzasadniającego tezę zadania: $2b=a+c\Rightarrow b=\frac{a+c}{2}$, zatem ciąg (a,b,c) jest arytmetyczny.	2
29.	Postęp: Zapisanie liczebności zdarzenia $A: \lvert A\rvert=10$ lub wypisanie zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A: A=\left\{\begin{matrix}(5,5,6),(5,6,5),(6,5,5),(4,6,6),(6,4,6),(6,6,4),(5,6,6),\\(6,5,6),(6,6,5),(6,6,6)\end{matrix}\right\}$	1
	Rozwiązanie bezbłędne: Wyznaczenie liczebności zbioru $\Omega: \lvert\Omega\rvert=216$ Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $A: P(A)=\frac{5}{108}$	2

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
30.	Postęp: Zapisanie oznaczeń: ABC – wierzchołki trójkąta $DEFG$ – wierzchołki kwadratu x – bok kwadratu CH – wysokość trójkąta ABC CJ – wysokość trójkąta $D, E \in AB, F \in BC, G \in AC$ i zapisanie proporcji: $\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert GF\rvert} = \frac{\lvert CH\rvert}{\lvert CJ\rvert}$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie proporcji w postaci: $\frac{a}{x} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2} - x}$	2
	Rozwiązanie bezbłędne: Rozwiązanie równania: $x = \frac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = a\left(2\sqrt{3} - 3\right)$	4 (3 pkt, gdy popełniono jeden błąd rachunkowy)
31.	Istotny postęp: Wprowadzenie oznaczenia: $C : C = (0, y)$ i zapisanie długości boków trójkąta $\lvert AB\rvert = \sqrt{(4-1)^2 + (2+3)^2}, \lvert AC\rvert = \sqrt{16 + (2-y)^2},$ $\lvert BC\rvert = \sqrt{1 + (y+3)^2}$	2 (1 pkt, gdy popełniono jeden błąd rachunkowy)
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie równania wynikającego z twierdzenia Pitagorasa: $9 + 25 = 16 + (2-y)^2 + 1 + (y+3)^2$	3
	Rozwiązanie pełne: Zapisanie równania w postaci: $2y^2 + 2y - 4 = 0$	4
	Rozwiązanie bezbłędne: Rozwiązanie równania: $y_1 = -2, y_2 = 1$ i zapisanie odpowiedzi: $C = (0, -2)$ lub $C = (0, 1)$	5
32.	Postęp: Wprowadzenie dokładnych oznaczeń lub wykonanie rysunku z oznaczeniami: ABC – dolna podstawa graniastosłupa $A'B'C'$ – górna podstawa graniastosłupa $P_{ACCA''} = 2\sqrt{3}, \lvert\angle C'AC\rvert = 60° \Rightarrow \frac{h}{a} = \sqrt{3}$ $\lvert CC'\rvert = h$	1
	Istotny postęp: Zapisanie układu równań: $\begin{cases} \frac{h}{a} = \sqrt{3} \\ ah = 2\sqrt{3} \end{cases}$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Rozwiązanie układu nierówności: $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ h = \sqrt{6} \end{cases}$	3
	Rozwiązanie prawie całkowite: Obliczenie przekątnej ściany bocznej graniastosłupa: $\lvert AC'\rvert = 2\sqrt{2}$ i wysokości trójkąta $ABC' : \lvert C'D'\rvert = \frac{\sqrt{30}}{2}$	5 (4 pkt, gdy obliczono tylko $\lvert AC'\rvert = 2\sqrt{2}$)
	Rozwiązanie bezbłędne: Obliczenie pola trójkąta $ABC' : P = \frac{\sqrt{15}}{2}$	6